Eco Industry
Oriented University

ALJABAR LINEAR

Teknik Pertambangan

Penulis ;

Bakti Siregar, M.Sc., CDS.

Edisi Pertama

Aljabar Linear

Bakti Siregar, M.Sc.,CDS

Table of contents

Aljabar Linear merupakan cabang matematika yang memegang peranan penting dalam berbagai aspek teknik pertambangan. Seiring dengan kemajuan teknologi dan ilmu data, Aljabar Linear menjadi semakin relevan, terutama dalam pengelolaan sumber daya mineral, eksplorasi tambang, dan optimasi proses produksi. Buku ini bertujuan untuk memberikan pemahaman yang mendalam tentang teori dasar Aljabar Linear serta penerapannya dalam konteks modern, di mana analisis data dan optimasi keputusan sangat penting dalam operasi tambang dan pengambilan keputusan strategis.

Dalam teknik pertambangan, Aljabar Linear digunakan dalam pemodelan geostatistik, analisis risiko, simulasi tambang, serta prediksi cadangan mineral. Konsep-konsep seperti vektor, matriks, dan transformasi linear sangat berguna untuk menyelesaikan berbagai masalah teknis, seperti optimasi penjadwalan tambang, perhitungan volume cadangan mineral, serta analisis kestabilan lereng tambang.

Dengan demikian, pemahaman terhadap Aljabar Linear merupakan hal yang krusial bagi para insinyur pertambangan untuk meningkatkan efisiensi dan akurasi dalam berbagai proses eksplorasi dan produksi.

Kata Pengantar

Aljabar Linear merupakan cabang matematika yang berfokus pada vektor, matriks, dan sistem persamaan linear. Konsep-konsep ini tidak hanya bersifat teoritis, tetapi juga memiliki aplikasi yang luas dalam berbagai bidang, termasuk **Teknik Pertambangan**. Dalam buku ini, saya menyajikan materi secara sistematis dan mudah dipahami, dengan penekanan pada penerapan praktis yang relevan dengan industri pertambangan.

Buku ini dirancang khusus untuk dapat mengintegrasikan teori Aljabar Linear dengan aplikasi praktis yang relevan, memberikan pembaca pemahaman mendalam tentang bagaimana konsep-konsep matematis dapat diterapkan untuk memecahkan masalah nyata dalam industri pertambangan. Selain itu, setiap bab dilengkapi dengan contoh kasus dan latihan yang membantu memperkuat pemahaman dan keterampilan analitis pembaca. Buku ini juga menyajikan penjelasan yang jelas dan sistematis, sehingga cocok bagi pembaca dengan berbagai tingkat pemahaman. Dengan pendekatan yang komprehensif dan berbasis praktik, buku ini menjadi sumber daya yang sangat berharga bagi mahasiswa, akademisi, dan profesional yang ingin memperdalam pengetahuan mereka dalam Aljabar Linear dan aplikasinya dalam bidang teknik pertambangan.

Tentang Penulis

Bakti Siregar M.Sc., CDS

Bakti bekerja sebagai Dosen di Program Sains Data ITSB. Beliau meraih gelar Magister dari Departemen Matematika Terapan di National Sun Yat Sen University, Taiwan. Selain mengajar, Bakti juga bekerja sebagai Data Scientist Freelance untuk perusahaan-perusahaan terkemuka seperti JNE, Samora Group, Pertamina, dan PT. Green City Traffic. Beliau memiliki antusiasme khusus dalam mengerjakan proyek (pengajaran) di bidang Big Data Analytics, Machine Learning, Optimisasi, dan Analisis Deret Waktu dalam bidang keuangan dan investasi. Keahlian utama beliau terletak pada bahasa pemrograman statistik seperti R Studio dan Python. Beliau juga berpengalaman dalam menerapkan sistem basis data seperti MySQL/NoSQL untuk manajemen data dan mahir dalam menggunakan alat Big Data seperti Spark dan Hadoop. Beberapa proyek beliau dapat dilihat di tautan berikut: Rpubs, Github, Website, dan Kaggle.

Ucapan Terima Kasih

Saya ingin mengucapkan terima kasih yang tulus kepada semua pihak yang telah mendukung dan berkontribusi dalam penyusunan buku ini. Pertama-tama, saya menghargai keluarga dan teman-teman saya yang selalu memberikan dorongan dan motivasi dalam setiap langkah proses penulisan. Terima kasih kepada para dosen dan mentor yang telah berbagi pengetahuan dan pengalaman berharga, serta memberikan masukan yang konstruktif. Saya juga berterima kasih kepada para pembaca yang telah meluangkan waktu untuk membaca dan mengevaluasi buku ini, karena umpan balik mereka sangat berharga untuk perbaikan di masa depan. Semoga buku ini dapat memberikan manfaat bagi banyak orang dan menjadi sumber inspirasi bagi pengembangan ilmu pengetahuan, khususnya dalam bidang Aljabar Linear dan teknik pertambangan.

Umpan Balik & Saran

Umpan balik dan saran dari pembaca sangat penting untuk peningkatan kualitas buku ini di masa depan. Kami mengajak semua pembaca untuk memberikan tanggapan mengenai isi, struktur, dan kejelasan penjelasan yang terdapat dalam buku ini. Saran tentang topik tambahan yang mungkin perlu ditambahkan atau aspek tertentu yang perlu diperjelas sangat dihargai, sehingga kami dapat melakukan perbaikan dan memperkaya materi dalam edisi mendatang. Dengan dukungan dan kontribusi dari pembaca, kami berharap buku ini dapat terus berkembang dan menjadi referensi yang lebih baik dalam memahami Aljabar Linear dan aplikasinya di bidang teknik pertambangan. Terima kasih atas perhatian dan partisipasi Anda!

Pembaca/pengguna yang ingin memberikan umpan balik dan saran dipersilakan untuk melakukannya melalui informasi kontak di bawah ini:

- dsciencelabs@outlook.com
- siregarbakti@gmail.com
- siregarbakti@itsb.ac.id

Chapter 1

Pengantar Aljabar Linear

"Aljabar linear adalah kunci untuk memahami matematika tingkat lanjut, karena menyediakan cara yang terpadu untuk menangani sistem persamaan, transformasi, dan banyak konsep lainnya." – Lay (2012)

1.1 Konsep Dasar Aljabar Linear

Aljabar Linear adalah cabang matematika yang berfokus pada studi vektor, matriks, dan sistem persamaan linear. Dalam konteks teknik pertambangan, pemahaman tentang Aljabar Linear sangat penting karena banyak aplikasi dalam pemodelan geologi, pengolahan data, dan optimasi proses.

1.1.1 Vektor

Definisi: Vektor adalah entitas matematis yang memiliki arah dan magnitudo. Dalam teknik pertambangan, vektor sering digunakan menggambarkan vektor posisi, perpindahan, dan gaya yang bekerja pada alat berat di tambang.

Penjelasan Visualisasi:

1. **Vektor Posisi:** Digambarkan sebagai garis biru yang menghubungkan posisi awal dan posisi akhir alat berat dalam ruang 3D.

2. **Vektor Gaya:** Vektor gaya digambarkan sebagai garis merah yang keluar dari posisi akhir alat berat, menunjukkan gaya yang bekerja di titik itu.

3. **Koordinat 3D:** Setiap sumbu mewakili arah gerakan atau gaya dalam tiga dimensi (X, Y, Z), memungkinkan kita melihat bagaimana alat berat berpindah atau terpengaruh oleh gaya dalam ruang.

1.1.2 Matriks

Dalam teknik pertambangan, matriks digunakan di berbagai aplikasi seperti simulasi komputer, optimasi sumber daya, dan pemodelan sistem tambang. Beberapa aplikasi lainnya termasuk:

- Analisis Struktural: Matriks digunakan untuk menganalisis distribusi tekanan dan tegangan di struktur tambang atau bangunan pendukung.
- Simulasi Transportasi: Matriks digunakan untuk memodelkan aliran material di jaringan transportasi dalam tambang.
- Pemrosesan Citra: Matriks digunakan untuk memproses citra dari tambang, seperti gambar udara atau hasil pemindaian tanah.

Contoh: Misalkan kita memiliki matriks berikut yang mewakili konsentrasi tiga jenis mineral di tiga lokasi tambang:

```
         Mineral A Mineral B Mineral C
Lokasi 1        10        12        14
Lokasi 2        15         9         7
Lokasi 3        20        22        18
```

Di sini, setiap baris bisa mewakili lokasi berbeda, dan setiap kolom bisa mewakili konsentrasi mineral yang berbeda.

1.1.3 Sistem Persamaan Linear

Definisi: Sistem persamaan linear adalah sekumpulan persamaan yang memiliki variabel yang sama. Dalam konteks pertambangan, sistem ini dapat digunakan untuk menghitung variabel-variabel yang saling berhubungan.

Misalkan kita memiliki tiga jenis mineral yang ditambang:

1. **Keuntungan dari Mineral A**:

$$z_1 = 2x + 3y + 1$$

2. **Keuntungan dari Mineral B**:

$$z_2 = 4x - y + 5$$

3. **Keuntungan dari Mineral C**:

$$z_3 = -x + 2y - 2$$

Di sini, x adalah jumlah mineral A yang ditambang, y adalah jumlah mineral B yang ditambang, dan z_1, z_2, dan z_3 adalah keuntungan yang dihasilkan dari masing-masing mineral.

Visualisasi Sistem Persamaan Linear dalam Pertambangan

Melalui visualisasi sistem persamaan linear, perusahaan pertambangan dapat mendapatkan wawasan berharga tentang bagaimana variasi dalam jumlah mineral yang ditambang mempengaruhi keuntungan. Analisis ini membantu dalam perencanaan dan pengambilan keputusan strategis yang berkaitan dengan operasi pertambangan.

1.2 Sejarah dan Perkembangan Aljabar Linear

Aljabar Linear telah ada sejak zaman kuno, dengan catatan penggunaan metode geometris untuk menyelesaikan masalah aljabar. Pada abad ke-19, beberapa matematikawan, termasuk **Carl Friedrich Gauss**, mengembangkan metode sistematis untuk menyelesaikan sistem persamaan linear, yang dikenal sebagai **eliminasi Gauss**. Penemuan teori ruang vektor dan basis oleh matematikawan seperti **Hermann Grassmann** memperluas aplikasi Aljabar Linear dalam analisis matematis.

Seiring dengan perkembangan teknologi, Aljabar Linear menjadi semakin penting dalam teknik pertambangan. Penggunaan perangkat lunak analisis data dan pemodelan geospasial yang berbasis Aljabar Linear telah membantu insinyur pertambangan untuk membuat keputusan yang lebih baik dan lebih efisien.

1.3 Penerapan Aljabar Linear

Aljabar Linear memiliki berbagai aplikasi dalam teknik pertambangan, antara lain:

1.3.1 Pemodelan Geologi

Aljabar Linear digunakan untuk membuat model geologi dari data eksplorasi. Ini melibatkan representasi data sebagai matriks dan penggunaan operasi matematis untuk menghasilkan model yang dapat membantu dalam memprediksi lokasi cadangan mineral.

Contoh: Dalam pemodelan geologi, kita bisa menggunakan matriks untuk menggambarkan hubungan antara berbagai parameter geologis seperti kedalaman, konsentrasi mineral, dan jenis batuan. Dengan menggunakan metode analisis, kita dapat memperkirakan potensi cadangan mineral.

1.3.2 Optimasi Proses Pertambangan

Aljabar Linear digunakan untuk memecahkan masalah optimasi, seperti menentukan rute transportasi yang paling efisien untuk mengangkut material tambang.

Contoh: Misalkan kita memiliki beberapa titik pengangkutan dan tujuan. Kita bisa menggunakan matriks untuk merepresentasikan biaya transportasi antara titik-titik tersebut dan menerapkan metode optimasi seperti **linear programming** untuk menemukan rute yang paling efisien.

1.3.3 Analisis Data

Teknik analisis data seperti analisis komponen utama *Principle Component Analysis (PCA)*, yang berbasis Aljabar Linear, digunakan untuk mengidentifikasi pola dalam data eksplorasi dan membantu dalam pengambilan keputusan.

Contoh: Misalkan kita memiliki data yang besar dari berbagai lokasi pertambangan. Dengan menerapkan PCA, kita dapat mereduksi dimensi data dan menemukan variabel utama yang paling berkontribusi terhadap variasi dalam data tersebut.

1.3.4 Sistem Persamaan Linear

Dalam konteks pertambangan, sistem persamaan linear dapat digunakan untuk menghitung variabel-variabel yang saling berhubungan. Berikut adalah beberapa contoh konkret:

Contoh 1: Analisis Aliran Air dalam Tambang

Dalam tambang, aliran air dapat mempengaruhi proses penambangan. Misalkan kita memiliki tiga zona dalam tambang yang memiliki laju aliran air yang berbeda. Kita ingin menentukan laju aliran air total yang keluar dari setiap zona berdasarkan beberapa variabel yang berhubungan.

Misalkan:

- (x_1): laju aliran dari zona A (m^3/jam)
- (x_2): laju aliran dari zona B (m^3/jam)
- (x_3): laju aliran dari zona C (m^3/jam)

Dari pengukuran, kita dapat menyusun sistem persamaan linear berikut:

1. $x_1 + 2x_2 + x_3 = 50 \quad \text{(Total laju aliran dari Zona A)}$
2. $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 80 \quad \text{(Total laju aliran dari Zona B)}$
3. $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 120 \quad \text{(Total laju aliran dari Zona C)}$

Kita dapat menggunakan metode eliminasi Gauss atau metode matriks untuk menyelesaikan sistem ini dan menemukan nilai x_1, x_2, dan x_3.

Contoh 2: Penjadwalan Produksi

Dalam perencanaan produksi di tambang, kita perlu menentukan jumlah mineral yang harus ditambang dari beberapa lokasi untuk memenuhi permintaan pasar. Misalkan kita memiliki tiga lokasi dengan permintaan dan kapasitas sebagai berikut:

- Lokasi 1: Permintaan = 100 ton, Kapasitas = 150 ton
- Lokasi 2: Permintaan = 80 ton, Kapasitas = 120 ton
- Lokasi 3: Permintaan = 70 ton, Kapasitas = 100 ton

Misalkan kita menggunakan variabel:

- x_1: jumlah mineral yang ditambang dari lokasi 1 (ton)
- x_2: jumlah mineral yang ditambang dari lokasi 2 (ton)
- x_3: jumlah mineral yang ditambang dari lokasi 3 (ton)

Kita dapat menyusun sistem persamaan linear sebagai berikut:

1. $x_1 + x_2 + x_3 = 250$ (Total mineral yang ditambang)
2. $x_1 \leq 150$ (Kapasitas lokasi 1)
3. $x_2 \leq 120$ (Kapasitas lokasi 2)
4. $x_3 \leq 100$ (Kapasitas lokasi 3)
5. $x_1 \geq 100$ (Permintaan lokasi 1)
6. $x_2 \geq 80$ (Permintaan lokasi 2)
7. $x_3 \geq 70$ (Permintaan lokasi 3)

Dari sini, kita dapat menggunakan metode optimasi (seperti Program Linear) untuk menentukan nilai x_1, x_2, dan x_3 yang optimal.

Contoh 3: Penentuan Konsentrasi Mineral

Misalkan kita ingin menentukan konsentrasi mineral dalam tiga sampel tanah yang diambil dari lokasi berbeda di tambang. Misalkan kita memiliki data konsentrasi mineral sebagai berikut:

- Sampel 1: Konsentrasi emas = a_1, konsentrasi perak = b_1, konsentrasi tembaga = c_1
- Sampel 2: Konsentrasi emas = a_2, konsentrasi perak = b_2, konsentrasi tembaga = c_2
- Sampel 3: Konsentrasi emas = a_3, konsentrasi perak = b_3, konsentrasi tembaga = c_3

Dengan x_1, x_2, dan x_3 sebagai variabel yang menunjukkan jumlah mineral yang akan diambil dari masing-masing sampel. Kita dapat menyusun sistem persamaan sebagai berikut:

1. $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \text{Target Emas}$
2. $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = \text{Target Perak}$
3. $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = \text{Target Tembaga}$

Dengan cara ini, kita dapat menghitung jumlah mineral dari setiap sampel yang perlu diambil untuk mencapai target konsentrasi mineral yang diinginkan.

1.3.5 Sistem Persamaan Linear dalam Simulasi

Model matematis yang dihasilkan dari sistem persamaan linear digunakan untuk mensimulasikan berbagai skenario dalam operasi tambang.

Contoh: Kita bisa membuat model untuk memprediksi aliran air di sekitar tambang dengan menggunakan sistem persamaan linear yang menggambarkan hubungan antara berbagai variabel, seperti curah hujan, permeabilitas tanah, dan pengambilan air dari sumur.

Chapter 2

Vektor

Aljabar linear, khususnya konsep vektor dan matriks, merupakan alat penting dalam berbagai aspek Teknik Pertambangan. Dalam dunia pertambangan, teknik ini digunakan untuk menganalisis data, memodelkan sistem geologi, serta merancang dan mengoptimalkan proses penambangan.

Penguasaan konsep vektor dan matriks tidak hanya memberikan dasar yang kuat dalam aljabar linear, tetapi juga memungkinkan mahasiswa Teknik Pertambangan untuk menerapkan metode matematis dalam analisis dan pengambilan keputusan di lapangan. Mahasiswa-i teknik pertambangan dapat dioptimalkan untuk meningkatkan efisiensi dan keamanan dalam operasi penambangan.

2.1 Vektor

Vektor digunakan untuk merepresentasikan berbagai parameter yang terkait dengan lokasi dan orientasi dalam ruang. Misalnya, vektor dapat digunakan untuk menggambarkan:

- **Posisi dan Arah:** Vektor posisi digunakan untuk menunjukkan lokasi titik-titik penting di dalam area tambang, seperti posisi sumur bor atau titik pengambilan sampel.
- **Gaya dan Vektor Kecepatan:** Dalam mekanika batuan, vektor digunakan untuk menggambarkan gaya yang bekerja pada bahan galian dan vektor kecepatan untuk memodelkan pergerakan material.

2.1.1 Definisi Vektor

Vektor adalah objek matematika yang memiliki dua sifat utama: **arah** dan **magnitude** (besar). Vektor dapat dipandang sebagai suatu kuantitas yang memiliki informasi mengenai seberapa besar dan ke mana suatu nilai atau kondisi mengarah. Dalam aljabar linear, vektor digunakan untuk merepresentasikan berbagai jenis data dan hubungan dalam ruang multidimensi.

2.1.2 Ciri-ciri Vektor

- **Magnitude**: Menggambarkan seberapa besar atau kuat vektor tersebut. Magnitude biasanya dihitung menggunakan rumus Pythagoras pada vektor dalam dua atau tiga dimensi.
- **Arah**: Menunjukkan ke mana vektor tersebut mengarah. Arah dapat dinyatakan dalam derajat, radian, atau sebagai sudut terhadap sumbu koordinat.
- **Dimensi**: Vektor dapat memiliki dimensi satu (vektor baris atau kolom), dua, tiga, atau lebih, tergantung pada jumlah komponen yang dimiliki. Sebuah vektor dalam n-dimensi biasanya dituliskan sebagai:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

2.1.3 Notasi Vektor

Vektor sering kali dilambangkan dengan huruf tebal (misalnya, $\mathbf{v}$) atau dengan tanda panah di atas huruf (misalnya, $\vec{v}$). Notasi ini membedakan vektor dari skalar, yang hanya memiliki magnitude tanpa arah.

2.1.4 Operasi pada Vektor

Penjumlahan/Pengurangan Vektor

Dua vektor dapat dijumlah/dikurang jika mereka memiliki dimensi yang sama. Penjumlahan dilakukan dengan menjumlahkan komponen-komponen yang sesuai.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{u} \pm \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 \pm v_1 \\ u_2 \pm v_2 \\ \vdots \\ u_n \pm v_n \end{pmatrix}$$

Perkalian Skalar

Mengalikan vektor dengan bilangan (skalar) akan mengubah magnitude vektor tetapi tidak mengubah arah.

$$c \cdot \mathbf{v} = c \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cv_1 \\ cv_2 \\ \vdots \\ cv_n \end{pmatrix}$$

Dot Product

Operasi ini menghasilkan skalar dan digunakan untuk menghitung sudut antara dua vektor serta menentukan apakah vektor tersebut saling tegak lurus.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n$$

Cross Product

Hanya berlaku untuk vektor dalam tiga dimensi, menghasilkan vektor baru yang tegak lurus terhadap kedua vektor yang digunakan.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Dengan pemahaman yang baik tentang vektor, mahasiswa dan profesional dapat mengaplikasikan konsep ini untuk menyelesaikan masalah yang kompleks.

2.2 Terapan Vektor

Vektor dan matriks merupakan konsep dasar dalam aljabar linear yang memiliki berbagai aplikasi dalam teknik pertambangan. Dalam konteks ini, vektor dan matriks digunakan untuk memodelkan dan menyelesaikan berbagai masalah yang berkaitan dengan eksplorasi dan ekstraksi sumber daya mineral.

2.2.1 Representasi Geometris

Vektor digunakan untuk merepresentasikan posisi, arah, dan gaya dalam ruang tiga dimensi. Dalam eksplorasi pertambangan, vektor dapat digunakan untuk menunjukkan lokasi titik pengeboran dan arah pengeboran.

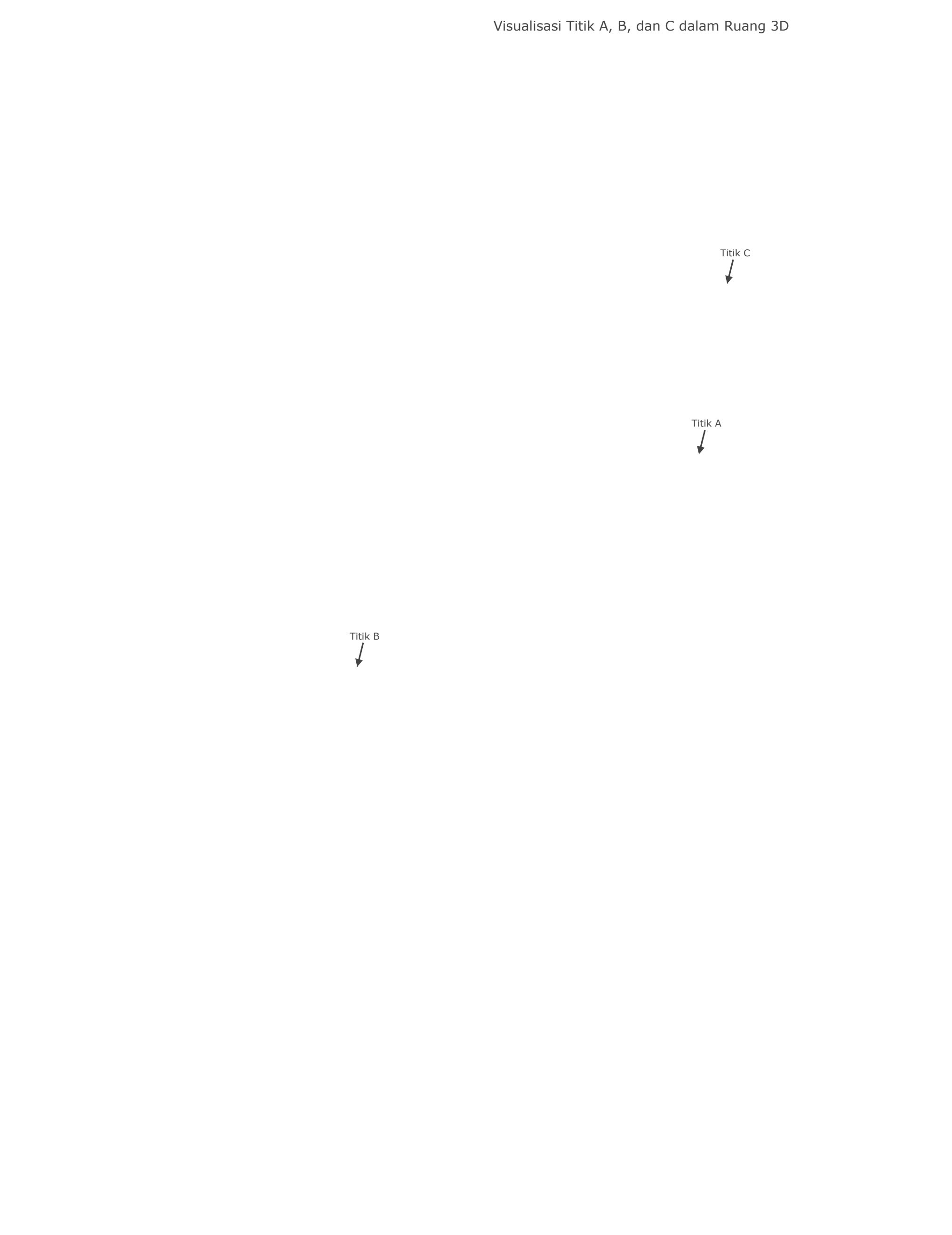
Misalkan, seorang insinyur sedang merancang jalur transportasi antara tiga titik lokasi alat berat di suatu proyek konstruksi. Titik-titik tersebut memiliki koordinat sebagai berikut:

- Titik $A : (2, 3, 5)$
- Titik $B : (4, 1, 3)$
- Titik $C : (1, 2, 6)$

Dapat dituliskan dalam bentuk vektor sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Perhatikan visualisasi jalur transportasi antara tiga titik lokasi alat berat di suatu proyek konstruksi tersebut adalah:



Insinyur tersebut perlu menghitung jarak antara titik A, B, dan C untuk merencanakan rute transportasi yang efisien. Mari kita hitung jarak antara setiap pasangan titik menggunakan rumus Pythagoras.

Menghitung Jarak antara Titik A dan B

Diberikan titik A dan B, kita akan menghitung jarak menggunakan rumus:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Perhitungan

- Titik A: (A(2, 3, 5))
- Titik B: (B(4, 1, 3))

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= 4 - 2 = 2 \\ y_2 - y_1 &= 1 - 3 = -2 \\ z_2 - z_1 &= 3 - 5 = -2 \end{aligned}$$

Selanjutnya, kita kuadratkan setiap selisih:

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)^2 &= 2^2 = 4 \\ (y_2 - y_1)^2 &= (-2)^2 = 4 \\ (z_2 - z_1)^2 &= (-2)^2 = 4 \end{aligned}$$

Jumlahkan hasil kuadrat:

$$4 + 4 + 4 = 12$$

Ambil akar kuadrat dari jumlah tersebut:

$$d_{AB} = \sqrt{12} \approx 3.46$$

Menghitung Jarak antara Titik B dan C

Selanjutnya, kita hitung jarak antara titik B dan C.

- Titik $B : B(4, 1, 3)$
- Titik $C : C(1, 2, 6)$

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= 1 - 4 = -3 \\ y_2 - y_1 &= 2 - 1 = 1 \\ z_2 - z_1 &= 6 - 3 = 3 \end{aligned}$$

Kuadratkan setiap selisih:

$$
\begin{aligned}
(x_2 - x_1)^2 &= (-3)^2 = 9 \\
(y_2 - y_1)^2 &= 1^2 = 1 \\
(z_2 - z_1)^2 &= 3^2 = 9
\end{aligned}
$$

Jumlahkan hasil kuadrat:

$$9 + 1 + 9 = 19$$

Ambil akar kuadrat dari jumlah tersebut:

$$d_{BC} = \sqrt{19} \approx 4.36$$

Menghitung Jarak antara Titik C dan A

Terakhir, kita hitung jarak antara titik C dan A.

- Titik $C : C(1, 2, 6)$
- Titik $A : A(2, 3, 5)$

$$
\begin{aligned}
x_2 - x_1 &= 2 - 1 = 1 \\
y_2 - y_1 &= 3 - 2 = 1 \\
z_2 - z_1 &= 5 - 6 = -1
\end{aligned}
$$

Kuadratkan setiap selisih:

$$
\begin{aligned}
(x_2 - x_1)^2 &= 1^2 = 1 \\
(y_2 - y_1)^2 &= 1^2 = 1 \\
(z_2 - z_1)^2 &= (-1)^2 = 1
\end{aligned}
$$

Jumlahkan hasil kuadrat:

$$1 + 1 + 1 = 3$$

Ambil akar kuadrat dari jumlah tersebut:

$$d_{CA} = \sqrt{3} \approx 1.73$$

Ringkasan Hasil Jarak

- Jarak antara Titik A dan $B :\approx 3.46$
- Jarak antara Titik B dan $C :\approx 4.36$
- Jarak antara Titik C dan $A :\approx 1.73$

Dengan demikian, insinyur dapat merencanakan rute transportasi yang efisien berdasarkan jarak yang telah dihitung.

2.3 Analisis Gaya

Seorang insinyur pertambangan sedang menganalisis gaya yang bekerja pada sebuah alat berat yang sedang mengangkat beban di dalam terowongan. Alat berat tersebut mengangkat beban seberat 600 N ke atas dengan gaya $\vec{F_1}$ dan mendukung alat tersebut ke sisi kanan dengan gaya $\vec{F_2}$ sebesar 400 N.

1. Tentukan vektor gaya total yang bekerja pada alat berat tersebut.
2. Hitunglah magnitudo dari gaya total tersebut.
3. Jika alat berat tersebut harus bergerak ke atas dengan kecepatan tetap, berapakah gaya yang diperlukan untuk mengimbangi gaya gravitasi?

2.3.1 Pembahasan

Menentukan Vektor Gaya Total

Dari informasi yang diberikan:

$$\text{Gaya mengangkat ke atas: } \vec{F_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 600 \end{pmatrix} \text{ N}$$

$$\text{Gaya ke sisi kanan: } \vec{F_2} = \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ N}$$

Untuk mendapatkan gaya total $\vec{F_{total}}$, kita jumlahkan kedua vektor gaya tersebut:

$$\vec{F_{total}} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 600 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \end{pmatrix} \text{ N}$$

Menghitung Magnitudo Gaya Total

Magnitudo dari gaya total dapat dihitung menggunakan rumus jarak Euclidean:

$$|\vec{F_{total}}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{400^2 + 600^2}$$

$$= \sqrt{160000 + 360000} = \sqrt{520000} \approx 721.11 \text{ N}$$

Gaya yang Diperlukan untuk Mengimbangi Gaya Gravitasi

Gaya gravitasi yang bekerja pada alat berat adalah 600 N (sebanding dengan berat beban yang diangkat). Agar alat berat dapat bergerak ke atas dengan kecepatan tetap, gaya yang bekerja ke atas harus sama dengan gaya gravitasi. Oleh karena itu, gaya yang diperlukan adalah:

$$\vec{F_{diperlukan}} = 600 \text{ N}$$

Visualisasi 3D Gaya pada Alat Berat

Penjelasan Visualisasi:

Vektor Gaya - Tiga vektor yang ditunjukkan:

- Gaya Mengangkat (F1): Ditarik dari titik asal (0,0) ke (0,600) dalam warna biru.
- Gaya Sisi Kanan (F2): Ditarik dari titik asal (0,0) ke (400,0) dalam warna merah.
- Gaya Total (F_total): Ditarik dari titik asal (0,0) ke (400,600) dalam warna hijau.

2.3.2 Kesimpulan

Dalam analisis ini, kita menemukan bahwa vektor gaya total yang bekerja pada alat berat adalah

$$\vec{F_{total}} = \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \end{pmatrix} \text{ N}$$

dengan magnitudo sekitar 721.11 N. Untuk menjaga alat berat bergerak ke atas dengan kecepatan tetap, gaya yang diperlukan adalah sama dengan gaya gravitasi, yaitu 600 N.

Chapter 3

Matriks

Matriks sering kali digunakan untuk mengorganisir dan menganalisis data yang kompleks. Beberapa aplikasi matriks dalam Teknik Pertambangan meliputi:

- **Sistem Persamaan Linear:** Dalam perencanaan tambang, matriks digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan yang menggambarkan hubungan antara variabel seperti volume material, biaya, dan waktu.
- **Analisis Data Geologi:** Matriks dapat merepresentasikan data geologi seperti komposisi mineral, kedalaman, dan sifat fisik dari berbagai lapisan tanah atau batuan. Analisis ini penting untuk menentukan strategi penambangan yang optimal.
- **Modeling:** Matriks digunakan dalam pemodelan geomekanika untuk menganalisis stabilitas lereng dan desain struktur bawah tanah.

3.1 Definisi Matriks

Matriks adalah susunan bilangan, simbol, atau ekspresi yang terorganisir dalam bentuk baris dan kolom. Dalam aljabar linear, matriks digunakan untuk merepresentasikan sistem persamaan linear, transformasi linier, dan berbagai operasi matematis lainnya. Matriks memiliki banyak aplikasi dalam berbagai bidang, termasuk fisika, ekonomi, dan teknik.

3.2 Bentuk Umum Matriks

Matriks biasanya dinotasikan sebagai:

$$A = [a_{ij}]$$

atau,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dalam hal ini:

- a_{ij} menunjukkan elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j,
- m adalah jumlah baris,
- n adalah jumlah kolom.

Sebagai contoh, sebuah matriks berukuran 3×2 adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Dalam matriks ini, ada 3 baris dan 2 kolom.

3.3 Operasi Matriks

Beberapa operasi dasar yang dapat dilakukan pada matriks meliputi:

3.3.1 Penjumlahan dan Pengurangan

Dua matriks dapat dijumlah/dikurang jika memiliki dimensi yang sama. Penjumlahan/Pengurangan dapat dilakukan dengan menjumlahkan elemen-elemen yang sesuai.

Penjumlahan/Pengurangan dua matriks A dan B didefinisikan jika kedua matriks memiliki ukuran yang sama, yaitu memiliki jumlah baris dan kolom yang sama. Jika A dan B masing-masing adalah matriks berukuran $m \times n$, maka hasil penjumlahan $A \pm B$ adalah matriks C berukuran $m \times n$ dengan elemen-elemen c_{ij} yang didefinisikan sebagai:

$$C = A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

Hasil penjumlahan matriks A dan B diberikan oleh:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

Dengan kata lain, elemen-elemen dari matriks hasil penjumlahan C adalah hasil penjumlahan dari elemen-elemen pada posisi yang sama di matriks A dan B:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

3.3.2 Perkalian

Perkalian matriks dilakukan dengan cara mengalikan baris dari matriks pertama dengan kolom dari matriks kedua. Matriks yang dapat dikalikan memiliki aturan dimensi yang spesifik; jika matriks $\mathbf{A}$ berukuran $m \times n$ dan matriks $\mathbf{B}$ berukuran $n \times p$, maka hasil perkalian $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ adalah matriks berukuran $m \times p$.

$$C = A \times B$$

di mana elemen-elemen dari matriks C adalah:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Dimana:

- a_{ik} adalah elemen pada baris ke-i dan kolom ke-k dari matriks A.
- b_{kj} adalah elemen pada baris ke-k dan kolom ke-j dari matriks B.

Misalkan kita memiliki dua matriks A dan B sebagai berikut:

Matriks A berukuran 2×3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriks B berukuran 3×2:

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Untuk menghitung elemen c_{11} pada matriks hasil C, kita mengalikan baris pertama dari matriks A dengan kolom pertama dari matriks B:

$$c_{11} = (1 \times 7) + (2 \times 9) + (3 \times 11) = 7 + 18 + 33 = 58$$

Elemen c_{12} dihitung dengan mengalikan baris pertama dari matriks A dengan kolom kedua dari matriks B:

$$c_{12} = (1 \times 8) + (2 \times 10) + (3 \times 12) = 8 + 20 + 36 = 64$$

Secara lebih rinci, bentuk umum perkalian dua matriks adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

Dengan elemen-elemen dari matriks hasil C sebagai berikut:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Artinya, setiap elemen c_{ij} pada matriks C merupakan hasil penjumlahan dari hasil kali elemen-elemen pada baris ke-i dari matriks A dengan elemen-elemen pada kolom ke-j dari matriks B.

3.3.3 Transpos

Transpos dari matriks $\mathbf{A}$, dilambangkan dengan $\mathbf{A}^T$, adalah matriks yang diperoleh dengan menukar baris menjadi kolom dan sebaliknya.

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Jika elemen dari matriks A adalah a_{ij}, maka elemen dari matriks transpos A^T dapat dinyatakan sebagai:

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}$$

Artinya, elemen pada baris ke-i dan kolom ke-j pada matriks transpos A^T adalah sama dengan elemen pada baris ke-j dan kolom ke-i pada matriks A.

Misalkan kita memiliki matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Maka transpos dari matriks A adalah:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat Transpos:

1. **Transpos dari Transpos**
$$(A^T)^T = A$$

2. **Penjumlahan Matriks**
$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

3. **Perkalian Matriks**
$$(A \times B)^T = B^T \times A^T$$

Transpos matriks merupakan operasi penting dalam aljabar linear, yang memungkinkan kita untuk melakukan berbagai manipulasi dan analisis terhadap matriks dengan mudah. Dengan memahami cara transpos matriks, kita dapat menerapkan sifat-sifat dan aturan-aturan dalam berbagai konteks matematika dan aplikasi lainnya.

3.3.4 Determinant

Determinant adalah nilai yang terkait dengan matriks persegi dan digunakan untuk menentukan apakah matriks tersebut memiliki invers.

Determinant dari matriks A berukuran $n \times n$ biasanya dilambangkan dengan $\det(A)$ atau $|A|$.

Penghitungan Determinan:

1. **Determinant Matriks 2x2**

   Untuk matriks A berukuran 2×2:
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
   Determinannya dihitung dengan rumus:
$$\det(A) = ad - bc$$

2. **Determinant Matriks 3x3**

   Untuk matriks B berukuran 3×3:
$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$
   Determinannya dihitung dengan rumus:
$$\det(B) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Sifat-sifat Determinan:

1. **Determinant Matriks Identitas**
$$\det(I) = 1$$

2. **Jika salah satu baris atau kolom dari matriks adalah nol**

$$\det(A) = 0$$

3. **Determinant dari matriks yang ditukar** Jika dua baris (atau dua kolom) dari matriks ditukar, maka determinan akan berubah tanda:

$$\det(B) = -\det(A)$$

4. **Determinant dari hasil kali matriks**

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

5. **Determinant dari matriks invers**

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Determinant adalah alat penting dalam aljabar linear, memberikan informasi mengenai sifat matriks dan digunakan dalam berbagai aplikasi, termasuk pemecahan sistem persamaan linear, analisis kestabilan, dan dalam geometri untuk menentukan volume. Memahami cara menghitung dan sifat-sifat determinan sangat penting untuk analisis matriks.

3.3.5 Invers

Invers matriks adalah matriks yang, ketika dikalikan dengan matriks asli, menghasilkan matriks identitas. Tidak semua matriks memiliki invers; hanya matriks persegi (matriks dengan jumlah baris dan kolom yang sama) yang dapat memiliki invers, dan matriks tersebut harus bersifat invertible, yaitu determinannya tidak sama dengan nol.

Invers dari matriks A dilambangkan dengan A^{-1}. Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$, maka invers A^{-1} memenuhi hubungan berikut:

$$A \times A^{-1} = I$$

di mana I adalah matriks identitas berukuran $n \times n$. Cara Menghitung Invers Matriks:

1. **Metode Adjoin (Cofactor)**

   Untuk menghitung invers dari matriks A berukuran 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

   Inversnya dapat dihitung dengan rumus:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

   Dengan catatan bahwa $\det(A) \neq 0$.

2. **Metode Gauss-Jordan**

   Metode ini melibatkan pembentukan matriks augmented yang menggabungkan matriks A dengan matriks identitas dan menerapkan operasi baris elementer hingga matriks A menjadi matriks identitas. Matriks identitas yang dihasilkan di sisi kanan dari matriks augmented akan menjadi invers dari A.

Sifat-sifat Invers:

1. **Invers dari Matriks Identitas**
$$I^{-1} = I$$
2. **Invers dari Hasil Kali Matriks**
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
3. **Invers dari Invers**
$$(A^{-1})^{-1} = A$$
4. **Jika A memiliki invers, maka A^{-1} juga memiliki invers**.

Misalkan kita memiliki matriks A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Untuk menghitung inversnya, kita terlebih dahulu menghitung determinannya:

$$\det(A) = (2)(4) - (3)(1) = 8 - 3 = 5$$

Karena $\det(A) \neq 0$, kita dapat menghitung invers:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Invers matriks adalah konsep fundamental dalam aljabar linear, digunakan dalam pemecahan sistem persamaan linear, analisis kestabilan, dan banyak aplikasi matematis lainnya. Memahami cara menghitung dan sifat-sifat invers sangat penting dalam analisis matriks.

$$(x_2 - x_1)^2 = 2^2 = 4$$
$$(y_2 - y_1)^2 = (-2)^2 = 4$$
$$(z_2 - z_1)^2 = (-2)^2 = 4$$

Jumlahkan hasil kuadrat:

$$4 + 4 + 4 = 12$$

Ambil akar kuadrat dari jumlah tersebut:

$$d_{AB} = \sqrt{12} \approx 3.46$$

3.4 Terapan Matriks

3.4.1 Analisis Data

Seorang ahli geologi sedang menganalisis data dari tiga lokasi pengeboran yang berbeda. Pada setiap lokasi, mereka mengukur komposisi dua jenis mineral. Hasil pengukuran tersebut disusun dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \text{Lokasi} & \text{Komposisi 1} & \text{Komposisi 2} \\ \text{A} & 0.5 & 0.7 \\ \text{B} & 0.6 & 0.8 \\ \text{C} & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Dalam matriks ini, setiap baris mewakili lokasi pengeboran, dan setiap kolom mewakili persentase komposisi mineral di setiap lokasi. Ahli geologi ingin mengetahui beberapa hal berikut:

1. **Penjumlahan komposisi total per lokasi**: Tentukan jumlah total komposisi mineral di setiap lokasi pengeboran $(A, B, danC)$.
2. **Lokasi dengan komposisi mineral tertinggi**: Di lokasi manakah total komposisi mineral (Komposisi 1 + Komposisi 2) paling tinggi?
3. **Rata-rata komposisi mineral**: Hitung rata-rata komposisi dari setiap jenis mineral (Komposisi 1 dan Komposisi 2) di semua lokasi.

Untuk menjawab pertanyaan di atas, Anda dapat menggunakan konsep dasar matriks dan operasi penjumlahan.

Langkah Penyelesaian:

1. Untuk menghitung **penjumlahan komposisi total per lokasi**, kita perlu menjumlahkan komposisi 1 dan komposisi 2 di setiap baris:
   - Lokasi $A : 0.5 + 0.7 = 1.2$
   - Lokasi $B : 0.6 + 0.8 = 1.4$
   - Lokasi $C : 0.4 + 0.9 = 1.3$
2. Untuk menemukan **lokasi dengan komposisi tertinggi**, kita bandingkan jumlah total setiap lokasi:
   - Lokasi $A : 1.2$
   - Lokasi $B : 1.4$ (tertinggi)
   - Lokasi $C : 1.3$

   Jadi, lokasi dengan total komposisi tertinggi adalah **Lokasi B**.
3. Untuk menghitung **rata-rata komposisi mineral**, kita ambil rata-rata dari setiap kolom:
   - Komposisi 1:
   $$\frac{0.5 + 0.6 + 0.4}{3} = \frac{1.5}{3} = 0.5$$

- Komposisi 2:
$$\frac{0.7+0.8+0.9}{3} = \frac{2.4}{3} = 0.8$$

  Rata-rata komposisi mineral untuk Komposisi 1 adalah **0.5** dan untuk Komposisi 2 adalah **0.8**.

Dengan menggunakan matriks di atas, kita dapat menganalisis data geologi secara efisien dan membuat kesimpulan yang dapat membantu perencanaan proyek pertambangan.

3.4.2 Transformasi Koordinat

Seorang insinyur pertambangan sedang bekerja di tambang bawah tanah dan ingin memodelkan pergerakan sebuah alat berat yang bergerak di sepanjang terowongan. Alat berat tersebut awalnya berada pada posisi vektor:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Namun, karena medan tambang yang tidak rata, alat ini mengalami transformasi koordinat. Pergerakan alat tersebut dimodelkan dengan menggunakan matriks transformasi T, yang merepresentasikan perubahan koordinat sesuai dengan faktor berikut:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Faktor ini menunjukkan bahwa pergerakan alat berat di sepanjang sumbu X dilipatgandakan 2 kali, di sepanjang sumbu Y dilipatgandakan 3 kali, dan di sepanjang sumbu Z dilipatgandakan 4 kali.

Pertanyaannya, tentukan posisi baru alat berat tersebut setelah mengalami transformasi ini. Visualisasikan pergerakan alat berat tersebut dari koordinat awal hingga koordinat akhir.

Diketahui:

Vektor posisi awal alat berat:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matriks transformasi T:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Dengan menghitung transformasi v', posisi baru alat berat menjadi:

$$v' = T \cdot v = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Artinya, alat berat kini berada di koordinat $v' = (2, 6, 4)$, setelah transformasi. Berikut adalah visualisasi dari perubahan posisi alat berat tersebut.

Berikut ini diperlihatkan visualiasai vektor v yang mengalami transformasi menjadi vektor v' dengan perubahan koordinat sesuai dengan matriks transformasi yang diterapkan. Vektor v' memiliki koordinat yang lebih besar karena elemen-elemen matriks T memperbesar nilai x, y, dan z masing-masing sesuai dengan faktor yang ada pada diagonal matriks transformasi tersebut.

Visualisasi Transformasi Koordinat

Chapter 4

Sistem Persamaan Linear

Sistem Persamaan Linear (SPL) adalah kumpulan dua atau lebih persamaan linear yang memiliki variabel yang sama. Tujuan dari SPL adalah untuk mencari nilai-nilai variabel yang memenuhi semua persamaan dalam sistem tersebut.

4.1 Bentuk Umum SPL

Bentuk umum dari persamaan linear adalah:

$$ax + by + c = 0$$

atau,

$$ax + by = c$$

di mana:

- a, b, dan c adalah konstanta.
- x dan y adalah variabel.

4.2 SPL Dua Variabel

Bentuk Umum SPL dua variabel adalah sebagai berikut:

1. $a_1x + b_1y = c_2$
2. $a_2x + b_2y = c_2$

SPL dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

4.2.1 Kasus 1: Kebutuhan Mineral

Misalkan kita memiliki dua tambang yang memproduksi dua jenis mineral: Mineral A dan Mineral B.

1. **Tambang 1** memproduksi 30 ton Mineral A dan 20 ton Mineral B per bulan.
2. **Tambang 2** memproduksi 50 ton Mineral A dan 30 ton Mineral B per bulan.

Jika perusahaan ingin memenuhi permintaan pasar yang membutuhkan total 450 ton Mineral A dan 290 ton Mineral B per bulan, kita dapat menggunakan sistem persamaan linear (SPL) untuk menentukan berapa banyak bulan masing-masing tambang harus beroperasi.

Misalkan x adalah jumlah bulan Tambang 1 beroperasi, dan y adalah jumlah bulan Tambang 2 beroperasi. Sistem Persamaannya adalah:

1. $$30x + 50y = 450$$
   (untuk Mineral A)
2. $$20x + 30y = 290$$
   (untuk Mineral B)

4.2.2 Metode Penyelesaian

Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear, antara lain:

1. Substitusi

Metode substitusi melibatkan penyelesaian satu persamaan untuk satu variabel, lalu substitusi nilai tersebut ke dalam persamaan lainnya.

Langkah-langkah penyelesaian:

1. Isolasi x dalam Persamaan (1):
$$30x = 450 - 50y$$
$$x = \frac{450 - 50y}{30}$$
$$x = 15 - \frac{5y}{3}$$
2. Substitusi x ke dalam Persamaan (2):
$$20\left(15 - \frac{5y}{3}\right) + 30y = 290$$
$$300 - \frac{100y}{3} + 30y = 290$$

3. Sederhanakan persamaan:

$$300 + \frac{-100y + 90y}{3} = 290$$
$$300 - \frac{10y}{3} = 290$$

4. Selesaikan untuk y:

$$\frac{-10y}{3} = -10$$
$$y = 3$$

5. Substitusi $y = 3$ ke dalam Persamaan untuk x:

$$x = 15 - \frac{5(3)}{3}$$
$$x = 15 - 5 = 10$$

Jadi, solusi dari sistem persamaan ini adalah:

$$x = 10, \quad y = 3$$

2. Eliminasi

Metode eliminasi melibatkan penjumlahan atau pengurangan persamaan untuk mengeliminasi satu variabel.

Langkah-langkah penyelesaian:

1. Kalikan Persamaan (1) dengan 2 dan Persamaan (2) dengan 3 untuk menyamakan koefisien x:

$$2(30x + 50y) = 2 \times 450$$
$$60x + 100y = 900$$

$$3(20x + 30y) = 3 \times 290$$
$$60x + 90y = 870$$

2. Kurangkan Persamaan (2) yang sudah dikalikan dari Persamaan (1) yang sudah dikalikan untuk mengeliminasi x:

$$(60x + 100y) - (60x + 90y) = 900 - 870$$
$$10y = 30$$
$$y = 3$$

3. Substitusi nilai $y = 3$ ke dalam salah satu persamaan asli, misalnya Persamaan (1):

$$30x + 50(3) = 450$$
$$30x + 150 = 450$$
$$30x = 300$$
$$x = 10$$

Jadi, solusi dari sistem persamaan ini adalah:

$$x = 10, \quad y = 3$$

3. Metode Grafik

Metode grafik melibatkan pemetakan setiap persamaan pada grafik dan menemukan titik potongnya. Titik potong tersebut adalah solusi dari sistem persamaan.

Langkah-langkah Penyelesaian

1. Tentukan Titik pada Persamaan (1):

   Persamaan (1): $30x + 50y = 450$

   - Ketika $x = 0$:

   $$30(0) + 50y = 450 \Rightarrow 50y = 450 \Rightarrow y = 9 \quad (0, 9)$$

   - Ketika $y = 0$:

   $$30x + 50(0) = 450 \Rightarrow 30x = 450 \Rightarrow x = 15 \quad (15, 0)$$

   Titik-titik pada garis pertama adalah $(0, 9)$ dan $(15, 0)$.

2. Tentukan Titik pada Persamaan (2):

   Persamaan (2): $20x + 30y = 290$

   - Ketika $x = 0$:

   $$20(0) + 30y = 290 \Rightarrow 30y = 290 \Rightarrow y = \frac{290}{30} \approx 9.67 \quad \left(0, \frac{290}{30}\right)$$

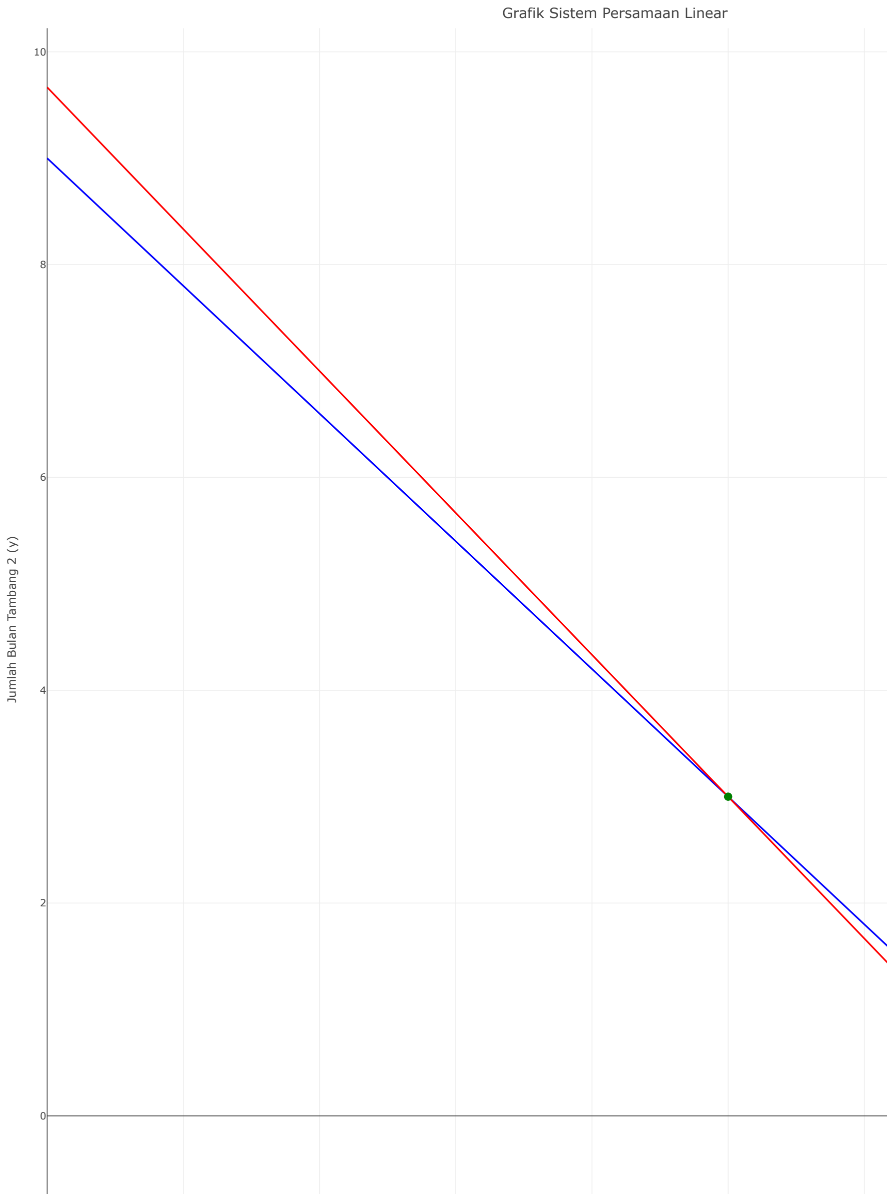
   - Ketika $y = 0$:

   $$20x + 30(0) = 290 \Rightarrow 20x = 290 \Rightarrow x = \frac{290}{20} = 14.5 \quad \left(\frac{290}{20}, 0\right)$$

   Titik-titik pada garis kedua adalah $\left(0, \frac{290}{30}\right)$ dan $\left(\frac{290}{20}, 0\right)$.

3. Gambarkan Kedua Garis:

Dengan memperhatikan kedua garis pada koordinat kartesius, ditemukan bahwa kedua garis berpotongan di titik $(10, 3)$.



Sehingga dapat disimpulkan, solusi dari sistem persamaan ini adalah:

$$x = 10, \quad y = 3$$

Artinya, Tambang 1 harus beroperasi selama 10 bulan, dan Tambang 2 harus beroperasi selama 3 bulan untuk memenuhi kebutuhan pasar sebanyak 450 ton Mineral A dan 290 ton Mineral B per bulan.

4.3 SPL Tiga Variabel

Bentuk umum dari sistem persamaan linear tiga variabel dapat dinyatakan sebagai:

1. $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
2. $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$
3. $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

SPL tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Keterangan:

- x, y, dan z adalah variabel yang tidak diketahui.
- $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3, d_3)$ adalah koefisien dan konstanta dari persamaan yang dapat berupa bilangan real.
- Matriks di sebelah kiri mengandung koefisien dari variabel, sedangkan matriks di sebelah kanan mengandung konstanta.

4.3.1 Kasus 2: Kebutuhan Batubara

Misalkan kita memiliki tiga tambang yang memproduksi tiga jenis batubara: Batubara **X**, Batubara **Y**, dan Batubara **Z**.

- **Tambang 1** memproduksi 20 ton Batubara **X**, 30 ton Batubara **Y**, dan 10 ton Batubara **Z** per bulan.
- **Tambang 2** memproduksi 40 ton Batubara **X**, 20 ton Batubara **Y**, dan 30 ton Batubara **Z** per bulan.
- **Tambang 3** memproduksi 30 ton Batubara **X**, 40 ton Batubara **Y**, dan 20 ton Batubara **Z** per bulan.

Perusahaan ingin memenuhi permintaan pasar yang membutuhkan total 800 ton Batubara **X**, 600 ton Batubara **Y**, dan 400 ton Batubara **Z** per bulan. Kita dapat menggunakan sistem persamaan linear (SPL) untuk menentukan berapa banyak bulan masing-masing tambang harus beroperasi.

Misalkan:

- x adalah jumlah bulan Tambang 1 beroperasi,
- y adalah jumlah bulan Tambang 2 beroperasi,

- z adalah jumlah bulan Tambang 3 beroperasi.

Sistem persamaannya adalah:

$$\begin{aligned} 20x + 40y + 30z &= 800 \quad \text{(untuk Batubara X)} \\ 30x + 20y + 40z &= 600 \quad \text{(untuk Batubara Y)} \\ 10x + 30y + 20z &= 400 \quad \text{(untuk Batubara Z)} \end{aligned}$$

Berapa bulan masing-masing tambang (x, y, z) harus beroperasi untuk memenuhi permintaan pasar?

4.3.2 Metode Invers Matriks

Sama halnya dengan SPL dua variabel, kasus ini dapat diselesaikan dengan Metode Substitusi, Metode Eliminasi, dan Metode Grafik. Tetapi prosesnya membutuhkan langkah yang terlalu panjang dan rumit, kasus ini sebaiknya diselesaikan dengan Metode Invers Matriks.

Langkah-langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan di atas dengan metode invers matriks adalah sebagai berikut:

Tulis Bentuk Matriks

Menyusun Matriks

Dari sistem persamaan, kita dapat menyusun matriks sebagai berikut:

- Matriks Koefisien (A):
$$A = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 30 \\ 30 & 20 & 40 \\ 10 & 30 & 20 \end{bmatrix}$$

- Matriks Variabel (X):
$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- Matriks Konstanta (B):
$$B = \begin{bmatrix} 800 \\ 600 \\ 400 \end{bmatrix}$$

Sehingga kita dapat menulis sistem persamaan dalam bentuk matriks sebagai:

$$AX = B$$

Penyelesaian Invers Matriks A

Untuk menyelesaikan X, kita perlu menghitung invers dari matriks A:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

Jika kita dapat menghitung invers A^{-1}, kita dapat memperoleh:

$$X = A^{-1}B$$

Hitung Invers Matriks A

Langkah-langkah Perhitungan adalah sebagai berikut:

1. Menghitung Determinan Matriks A

   Determinan A dihitung dengan ekspansi kofaktor sebagai berikut:

   $$\det(A) = 20(20 \cdot 20 - 10 \cdot 30) - 40(30 \cdot 20 - 10 \cdot 40) + 30(30 \cdot 10 - 10 \cdot 20)$$

   Dengan menghitung setiap bagian:

   - $20 \cdot (400 - 300) = 2000$
   - $-40 \cdot (600 - 400) = -8000$
   - $30 \cdot (300 - 200) = 3000$

   Sehingga,

   $$\det(A) = 2000 - 8000 + 3000 = -48000$$

2. Menghitung Matriks Kofaktor dan Adjoin Matriks A

   Setelah menghitung kofaktor untuk setiap elemen, kita memperoleh:

   $$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -2000 & 1000 & 1000 \\ 3000 & -4000 & 1000 \\ 1000 & 2000 & -600 \end{bmatrix}$$

3. Menghitung Invers Matriks A

   Invers matriks A adalah:

   $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

   Dengan $\det(A) = -48000$, maka:

   $$A^{-1} = \frac{1}{-48000} \cdot \begin{bmatrix} -2000 & 1000 & 1000 \\ 3000 & -4000 & 1000 \\ 1000 & 2000 & -600 \end{bmatrix}$$

atau disederhanakan menjadi:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{24} & -\frac{1}{48} & -\frac{1}{48} \\ -\frac{1}{16} & \frac{5}{48} & -\frac{1}{48} \\ -\frac{1}{48} & -\frac{1}{24} & \frac{1}{80} \end{bmatrix}$$

4. Menghitung Nilai x, y, dan z

   Untuk mendapatkan nilai $X = A^{-1} \cdot B$:

   - Untuk x:

   $$x = \frac{1}{24} \cdot 800 - \frac{1}{48} \cdot 600 - \frac{1}{48} \cdot 400 = 10$$

   - Untuk y:

   $$y = -\frac{1}{16} \cdot 800 + \frac{5}{48} \cdot 600 - \frac{1}{48} \cdot 400 = 5$$

   - Untuk z:

   $$z = -\frac{1}{48} \cdot 800 - \frac{1}{24} \cdot 600 + \frac{1}{80} \cdot 400 = 4$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa:

- **Jumlah bulan Tambang 1 beroperasi** ((x)) = 10 bulan
- **Jumlah bulan Tambang 2 beroperasi** ((y)) = 5 bulan
- **Jumlah bulan Tambang 3 beroperasi** ((z)) = 4 bulan

Visualisasi Kasus 2

Berikut diperlihatkan visualisasi ketiga persamaanya tersebut:

Visualisasi 3D Sistem Persamaan Batubara

Chapter 5

Ruang Vektor dan Basis

5.1 Definisi Ruang Vektor

5.2 Basis dan Dimensi

5.3 Terapan Ruang Vektor

Chapter 6

Transformasi Linear

6.1 Pengertian

6.2 Sifat Transformasi Linear

6.3 Representasi Transformasi Linear

6.4 Terapan Transformasi Linear

Chapter 7

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

7.1 Definisi Nilai Eigen

7.2 Vektor Eigen

7.3 Analisis Stabilitas

7.4 Dinamika Sistem

Chapter 8

Terapan Nilai Eigen

8.1 Penggunaan Nilai Nigen

8.2 Analisis Komponen Utama

8.3 Eksplorasi Geologi

Chapter 9

Dekomposisi Nilai Singular

9.1 Konsep dan Definisi

9.2 Proses Dekomposisi Matriks

9.3 Terapan Dekomposisi Nilai Singular

Chapter 10

Metode Simpleks

10.1 Konsep Dasar Metode Simpleks

10.2 Prosedur Metode Simpleks

10.3 Penerapan Metode Simpleks

Chapter 11

Metode Kuadrat Terkecil

11.1 Konsep Dasar Metode Kuadrat Terkecil

11.2 Prosedur Metode Kuadrat Terkecil

11.3 Penerapan Metode Kuadrat Terkecil

Chapter 12

Program_Linear

12.1 Konsep Dasar Program Linear

12.2 Prosedur Program Linear

12.3 Penerapan Program Linear

Chapter 13

Studi Kasus

Epilog

Aljabar linear memainkan peran yang sangat penting dalam berbagai aspek teknik pertambangan. Dalam industri ini, analisis data, pemodelan, dan optimasi sangat diperlukan untuk meningkatkan efisiensi, meminimalkan risiko, dan memaksimalkan hasil produksi. Berikut ini adalah beberapa cara di mana aljabar linear diterapkan dalam teknik pertambangan:

Pemodelan Geologi

Dalam eksplorasi pertambangan, aljabar linear digunakan untuk memodelkan struktur geologi. Matriks digunakan untuk merepresentasikan data geologi, seperti kedalaman lapisan, jenis batuan, dan keberadaan mineral. Dengan menerapkan teknik pemodelan berbasis matriks, insinyur pertambangan dapat menganalisis dan memvisualisasikan data untuk menentukan lokasi yang paling menjanjikan untuk pengeboran.

Analisis Data

Teknik pertambangan menghasilkan volume data yang besar dari berbagai sumber, seperti survei geofisika, pengujian sampel, dan pemantauan lingkungan. Aljabar linear memungkinkan analisis data tersebut melalui teknik seperti Dekomposisi Nilai Singular (SVD) dan Regresi Linier. Ini membantu dalam mengidentifikasi pola dan hubungan antar variabel, yang penting untuk pengambilan keputusan yang informasional.

Optimasi Proses Pertambangan

Optimasi adalah kunci dalam pengelolaan sumber daya dan operasional di tambang. Dengan menggunakan metode aljabar linear, seperti metode simpleks, insinyur dapat mengembangkan model matematis yang meminimalkan biaya dan memaksimalkan output. Model ini mempertimbangkan berbagai faktor, termasuk biaya operasional, kualitas mineral, dan kapasitas produksi.

Perencanaan dan Penjadwalan

Aljabar linear juga berperan dalam perencanaan dan penjadwalan kegiatan pertambangan. Dengan menerapkan teknik pemrograman linier, insinyur dapat merancang rencana operasi yang efisien, mengalokasikan sumber daya dengan optimal, dan meminimalkan waktu henti. Ini sangat penting untuk memastikan bahwa semua kegiatan dilakukan dalam kerangka waktu dan anggaran yang telah ditetapkan.

Simulasi dan Model Dinamis

Dalam teknik pertambangan, seringkali diperlukan simulasi untuk memahami bagaimana sistem beroperasi dalam berbagai kondisi. Aljabar linear mendukung pembuatan model dinamis yang dapat memperhitungkan perubahan dalam variabel, seperti permintaan pasar, biaya energi, dan peraturan lingkungan. Model ini membantu insinyur untuk merencanakan dan merespons perubahan dengan lebih baik.

Kesimpulan

Secara keseluruhan, aljabar linear merupakan alat yang esensial dalam teknik pertambangan. Dengan kemampuannya untuk menganalisis data, memodelkan sistem, dan mengoptimalkan proses, aljabar linear membantu insinyur pertambangan untuk membuat keputusan yang lebih baik, meningkatkan efisiensi operasional, dan mengurangi dampak lingkungan. Seiring dengan perkembangan teknologi dan data, pemahaman yang mendalam tentang aljabar linear akan terus menjadi keterampilan yang sangat berharga bagi para profesional di bidang pertambangan.

References

Lay, D. C. (2012). *Linear algebra and its applications* (4th ed.). Pearson.

Lay, D. C. (2012). *Linear algebra and its applications* (4th ed.). Pearson.

ITSB | Eco Industry Oriented University

sinarmas

ALJABAR LINEAR

Teknik Pertambangan

Penulis ;

Bakti Siregar, M.Sc., CDS.

D'SCIENCELABS
Smart Idea

Kampus Merdeka
INDONESIA JAYA

Edisi Pertama