

Beweis:

$$(1) \quad Q(a, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - a - b \cdot x_i]^2 = \min!$$

Bedingungen erster Ordnung (2):

$$(2a) \quad \frac{\partial Q(a, b)}{\partial a} = \sum_{i=1}^n [2 \cdot (y_i - a - b \cdot x_i) \cdot (-1)] = 0$$

$$(2b) \quad \frac{\partial Q(a, b)}{\partial b} = \sum_{i=1}^n [2 \cdot (y_i - a - b \cdot x_i) \cdot (-x_i)] = 0$$

$$(2a) \Rightarrow \sum_{i=1}^n (y_i - a - b \cdot x_i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i - n \cdot a - b \cdot \sum_{i=1}^n x_i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i - a - b \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = 0 \Leftrightarrow$$

$$(3a) \quad a = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i - b \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \Leftrightarrow a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$$

$$(2b) \Rightarrow \sum_{i=1}^n [(y_i - a - b \cdot x_i) \cdot x_i] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i - a \cdot x_i - b \cdot x_i^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(3b) \quad \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - a \cdot \sum_{i=1}^n x_i - b \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

$$(3a) \text{ in } (3b) \quad \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i - b \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \sum_{i=1}^n x_i - b \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - b \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - b \cdot n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$(4) \quad b = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n y_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

Die Bedingungen zweiter Ordnung sind erfüllt, was hier nicht überprüft werden soll.